Mathematische Objekte: Vektoren

Basis und Dimension

Mathematische Objekte: Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

Definition: linear unabhängige Vektoren

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ aus einem Vektorraum V sind linear unabhängig, genau dann wenn die Linearkombination des Nullvektors

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ besitzt.

Existiert eine nicht-triviale Lösung, bei der nicht alle Koeffizienten null sind, so werden die Vektoren linear abhängig genannt.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

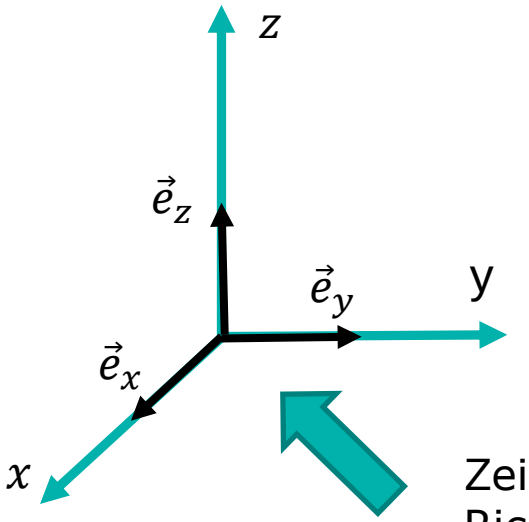
Mathematische Objekte: Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel

Wir betrachten die drei Vektoren…

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



Wir betrachten die Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

⇒ nur triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Zeigen in „verschiedene Richtungen“ bzw. spannen den kompletten Raum auf

⇒ **Linear unabhängig**

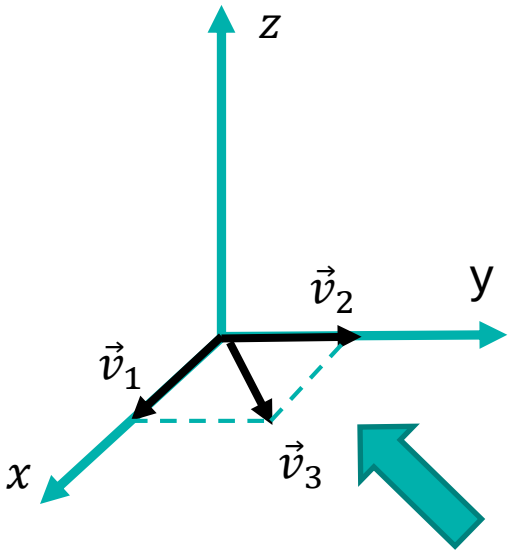
Mathematische Objekte: Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel

Wir betrachten die drei Vektoren…

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$



Wir betrachten die Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

→ mögliche Lösung $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1\,,\ \lambda_3 = -1$

Liegen in einer Ebene und spannen nur die Ebene auf → **Linear abhängig**

Mathematische Objekte: Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Welche Vektoren sind linear unabhängig?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Lineare Unabhängigkeit

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Welche Vektoren sind linear unabhängig?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

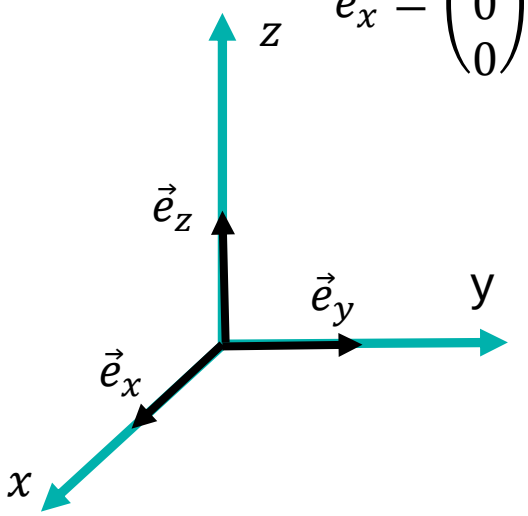
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Basis

Standardbasis

Die Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ werden als Standardbasis bezeichnet.



$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Was ist das Besondere an diesen Vektoren?

Wie können jeden Vektor $\vec{a}$ als eindeutige Linearkombination dieser Vektoren darstellen…

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ Basis des Vektorraums

Mathematische Objekte: Vektoren

Basis

Standardbasis

Wir betrachten die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ …

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilden die auch eine Basis? Kann ich mit diesen Vektoren auch jeden anderen Vektor eindeutig als Linearkombination darstellen?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scheint eine Basis zu sein…

⇒ Wir lösen ein Gleichungssystem…

⇒ $\lambda_1 = a_1 \quad \lambda_2 = a_2 - a_3 \quad \lambda_3 = a_3$

Mathematische Objekte: Vektoren

Basis

Was haben wir bisher herausgefunden?

Mit Vektoren, die eine Basis bilden, können wir eindeutig alle Vektoren aus dem Vektorraum als Linearkombination darstellen.

Es existiert nicht nur die Standardbasis. Auch andere Vektoren können eine Basis bilden.

Unsere Basis bestand in beiden Beispielen aus drei Vektoren…

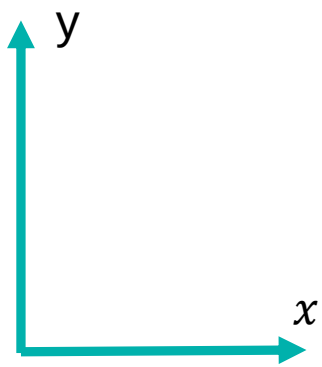
Die Anzahl der Basisvektoren scheint mit der Dimension zusammen zu hängen.

Mathematische Objekte: Vektoren

Basis

Zusammenhang Dimension und Basislänge

Wir betrachten die Situation in der zweidimensionalen Ebene…



Wir wissen:

Um eine Ebene aufzuspannen, benötigen wir zwei linear unabhängige Vektoren…

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren bilden wieder die Standardbasis…

Zusammenhang:

Zwei Dimensionen der Ebene ⟺ zwei Basisvektoren

Mathematische Objekte: Vektoren

Basis

Beispiel

Um die Zusammenhänge besser verstehen zu können, betrachten wir ein weiteres Beispiel…

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Bilden sie eine Basis für den zweidimensionalen Vektorraum?

Können wir jeden Vektor als Linearkombination darstellen?

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = a_1,\ \lambda_2 = a_2,\ \lambda_3 = 0$$

Problem: Die Darstellung ist nicht eindeutig…

Es gibt z.B. auch diese Lösung…

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = a_1 - a_2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = a_2$$

Wir haben anscheinend „zu viele" Vektoren…

Mathematische Objekte: Vektoren

Erzeugendensystem

Was haben wir festgestellt?

Mit den Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kann ich jeden zweidimensionalen Vektor als Linearkombination darstellen.

Diese Darstellung ist aber nicht eindeutig…

Wir sagen…

Die drei Vektoren spannen den Raum V auf, bzw. sie erzeugen ihn.

$$\Rightarrow \quad V = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

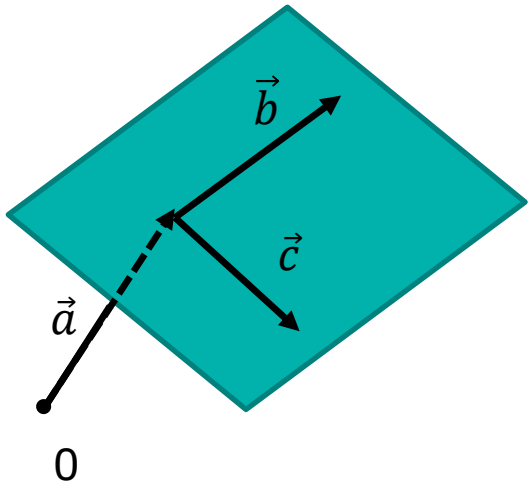
Die drei Vektoren bilden ein Erzeugendensystem für den Vektorraum V.

Mathematische Objekte: Vektoren

Erzeugendensystem

Beispiel

Wir kennen schon Vektoren, die einen Teilraum aufspannen…



Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen
Die Ebene auf…

Sie bilden eine Erzeugendensystem
Für die Ebene, wobei wir noch den
Stützvektor benötigen…

$$E = \vec{a} + \text{span}\left\{\vec{b}, \vec{c}\right\}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Erzeugendensystem und Basis

Beispiele

Wann bildet ein Erzeugendensystem eine Basis?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Erzeugendensystem aber keine Basis

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Erzeugendensystem und Basis

Es gibt zwei entscheidene Unterschiede, die für die eindeutige Darstellung als Linearkombination verantwortlich sind…

Länge der Basis (Anzahl der Vektoren)

Lineare Unabhängigkeit

Mathematische Objekte: Vektoren

Definitionen

Erzeugendensystem

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ aus einem Vektorraum V heißt Erzeugendensystem von V, wenn jeder Vektor $\vec{v}$ aus V als Linearkombination der Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ geschrieben werden kann:

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

Wir sagen auch, dass die Vektoren den Vektorraum V aufspannen, d.h.

$$V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Definitionen

Dimension

Eine Vektorraum V besitzt die Dimension $n \in \mathbb{R}$, wenn er n linear unabhängige Vektoren besitzt, aber immer $n + 1$ Vektoren linear abhängig sind.

Bedeutung:

Die Dimension eines Vektorraumes gibt die maximal mögliche Anzahl an linear unabhängigen Vektoren an. Nehmen wir einen weiteren Vektor hinzu, wir das System linear abhängig.

Mathematische Objekte: Vektoren

Definitionen

Basis

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ aus einem Vektorraum V heißt Basis von V, wenn jeder Vektor $\vec{v}$ aus V als eindeutige Linearkombination der Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ geschrieben werden kann:

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots \lambda_n \cdot \vec{v}_n$$

Äquivalente Definitionen:

Eine Menge von Vektoren bildet eine Basis, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem sind.

Besitzt der Vektorraum die Dimension n, dann bilden n linear unabhängige Vektoren immer eine Basis, sie sind also automatisch ein Erzeugendensystem.

Die Dimension gibt also an, wie viele Vektoren ich benötige um eindeutig den gesamten Vektorraum aufzuspannen. Ein Vektor mehr/weniger zerstört diese Eigenschaft.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mathematische Objekte: Vektoren

Definitionen

Veranschaulichung

Wir betrachten einen Vektorraum der Dimension n…

